编号（学号）：201609140301

西華師範大學

本科学生毕业论文（设计）

题　　目：定域规范场论的数学原理

Mathematical Principles of Local Gauge Field Theory

学院名称：物理与空间科学学院

专业名称：物理学

年　　级：2016 级 3 班

学生姓名：代顺治

学　　号：201609140301

指导教师：王旭东　职称/学历：讲师/博士

教务处　制

*上一次修订：2020 年 12 月 27 日，修改了部分标点符号与附录的个别字词。

定域规范场论的数学原理

代顺治

物理与空间科学学院物理学专业 2016 级　指导教师：王旭东

摘　要：本文利用微分几何的方法研究了规范场论的数学原理.全文分为四章：第一章我们回顾了规范理论的历史；第二章我们对平凡主丛的张量运算法则及 Cartan-Killing 型做了简要的介绍；第三章我们描述了平凡主丛上的联络、曲率，给出了 Yang-Mills 作用量的一些性质，并利用 Hodge 对偶给出了 Yang-Mills 作用量的整体内积形式，最后我们用最小作用量原理得到了 Yang-Mills 作用量满足的 Euler-Lagrange 方程；第四章我们对全文进行了总结，并给出了一些展望。

关键词：规范场论；Yang-Mills 理论；微分几何；平凡主丛

Mathematical Principles of Local Gauge Field Theory

Shunzhi. Dai

Department of Physics Grade 2016 Instructor: Xudong. Wang

Abstract: In this paper, we had studied the mathematical principle of gauge field theory by means of differential geometry. This paper is divided into four chapters: In chapter 1, we reviewed the histories of gauge field theory; in chapter 2, we briefly introduce the tensor algorithm and Cartan-Killing form of trivial principal bundle; In chapter 3, we described the connection and curvature on the Principal bundle, and discussed the some properties of the Yang-Mills action, and give the integral inner product type of the yang-mills action by using Hodge dual， and finally, we obtain the euler-lagrange equation that the yang-mills action satisfies by using the minimum action principle; In the chapter 4, we summarize the whole paper and give some prospects.

Key words: Gauge Field Theory; Yang-Mills Theory; Differential Geometry; Principal Bundle

目录

第一章 引言

自二十世纪以来，基础物理学得到了深远的发展，彻底改变了人类对自然规律的认知。在这些变革之中，最为重要的就是广义相对论与量子场论，但这二者之间至今仍存有不可调和的疑难，是目前的研究热点。

1915 年，Einstein 率先发表了广义相对论，这一理论将时间与空间统一成一个有机的整体，并描述了物质场与时空几何结构的相互作用。1918 年至 1919 年间，数学家 Hermann Weyl 受到 Einstein 的“电磁学几何化”思想的影响，接连发表了数篇以“引力与电”为主题的文章[4]，这被视为规范理论的开端[7]。但随后 Einstein 批评了 Weyl 的想法，导致 Weyl 的理论被暂时搁置。此时量子物理也在逐步发展，为了解决量子电动力学中高阶微扰的发散疑难，物理工作者们发明了重正化。由于重正化的巨大成功，再加上实验发现了越来越多的新粒子，人们试图推广场论或寻找场论的替代理论，以便描述粒子间的相互作用[11]。

1922 年 Kaluza、Klein 等人将规范场作为度规在额外维的分量，创造了一个五维的引力-电磁统一理论，现在被叫做 KK 理论。虽然 KK 理论取得了一定程度上的成功，但这一五维理论的运动方程与四维情况不自洽，必须引入一个无法解释物理意义的标量场以消除额外维的影响[2]。人们最终回过头来，将目光再次放到 Weyl 的理论上，雪藏 10 年的规范理论重获生机。现在我们知道，Weyl 理论只是一个 Abel 的规范理论。到了 1952 年，杨振宁、Mills 等人将 Weyl 的 Abel 规范理论推广到了 SU(2)非 Abel 情形。1972 年，Gell-Mann 等人又进一步推广到 SU(3)非 Abel 情形。1971 年至 1972 年间，Veltman 等人证明了规范理论可重正化，表明了规范理论是一个自洽的量子理论[5,11]。逐步建立起来的粒子物理标准模型得到高能物理实验的验证，也进一步巩固了规范理论的地位。

规范理论的巨大成功使得理论物理工作者们尝试将 Einstein 引力理论纳入其框架中，从而获得一个可重正化的量子引力理论。困境在于 Einstein 引力理论与规范理论的基本场存在差异：前者的基本场是度规场，而后者是的基本场是规范场，它们不处于同一地位；前者的作用量是 Einstein-Hilbert 作用量，后者的作用量是 Yang-Mills 作用量，而前者不能被修改成后者的形式。各种困难使得所有尝试举步维艰，但数学的发展或许给理论物理带来了一线生机。上世纪 70 年代左右，由于陈省身等人的贡献，微分几何逐步发展壮大，形成了颇具规模的理论体系。人们注意到规范场与微分几何中的纤维丛理论有关，规范场相当于平凡主丛上的联络，而场强张量相当于平凡主丛上的曲率张量。Witten 等人对 Chern-Simons 作用量的研究也加深了微分几何与理论物理的交融[6]。

许多现代的量子场论教材都阐述了非 Abel 的规范场论，但大多数教材都使

用了分量表述，过于依赖局部坐标系。本文用“整体”的表述构造了规范场论的基本框架，仅在必要时借助局部坐标系展开张量。这种表述使得多数公式没有繁杂的指标，非常优雅。除此之外，本文还将通常的 4 维时空推广到了 n 维的一般情况，这种普适性对我们讨论 3 维或额外维的规范理论有很大的帮助。

第二章 向量值张量场的内积

我们假定读者对微分几何以及 Lie 代数有一定的基础，所以不再过多叙述数学上的细节。在正式讨论规范理论前，我们需要模仿广义相对论来构造规范理论的几何框架。通过扩大广义相对论中某些数学工具的适用范围，我们就能得到适用于规范理论的数学工具。这种特性使得我们在讨论规范理论时能很好的与广义相对论比较异同。为了区分时空维数n与 Lie 群维数r，我们将采用两套不同的指标体系：以希腊字母$\mu,\nu,\cdots$表示时空指标，以西文字母$a,b,\cdots$表示 Lie 群指标。以后我们将默认使用 Einstein 求和约定，即相同指标表示求和。附录 A 给出了更细致的符号约定。

2.1 向量值的张量场

在广义相对论中，我们使用的张量均为实值张量.这是说任意一个(p,q)型张量都能将p个矢量与q个对偶矢量映射成一个实数.我们扩大这一定义，从而得到向量值的张量[9].

定义 2.1 设V,W是矢量空间，V^*是V的对偶空间，则称多重线性映射

$$S:\underbrace{V\times\cdots\times V}_{p\text{个}}\times\underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{q\text{个}}\to W \tag{2.1}$$

是一个W值(p,q)型张量.

与实值张量相同，任意一个W值(p,q)型张量也能借助矢量空间V,V^*的基底$\{e_\mu\},\{e^\mu\}$在局部坐标系中展开成分量形式

$$S=S^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q}e_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes e_{\mu_p}\otimes e^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes e^{\nu_q}, \tag{2.2}$$

其中分量$S^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q}$是一个$W$中的向量.以后，在不加声明的情况下，我们均令线性空间W是 Lie 代数的表示空间.

设$\{T_a\},a=1,\cdots,r$是 Lie 代数$\mathfrak{g}$的一组生成元，则(2.2)可展开为

$$S=(S^a)^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q}T_a e_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes e_{\mu_p}\otimes e^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes e^{\nu_q}, \tag{2.3}$$

其中$(S^a)^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q}$是$S^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q}$在基底$\{T_a\}$下的分量.特殊的，$\mathfrak{g}$值$(0,0)$型张量就是$\mathfrak{g}$的元素.

在此基础上，我们便可以逐点定义流形上的$\mathfrak{g}$值(p,q)型张量，并将这些张量空间“拼接”在一起，从而得到流形M上的$\mathfrak{g}$值(p,q)型张量丛，取丛的截面得到$\mathfrak{g}$值(p,q)型张量场.我们最常使用的$\mathfrak{g}$值张量场便是$\mathfrak{g}$值外微分形式场，它作为一种全反对称的$(0,q)$型张量场，仍然适用于上述规律，这里不再赘述.

2.2 $\mathfrak{g}$值张量场的内积

这一节我们将构造$\mathfrak{g}$值张量场的内积，它由 Riemann 流形M上的度量与 Lie 群G上的度量一同给出.与普通流形的内积不同，Lie 群的内积有更多的数学细节，称为伴随不变内积.在给出伴随不变内积之前，我们先给出 Lie 代数伴随表示的

定义[13].

定义 2.2 设V, W是矢量空间，$(V,\circ), (W,*)$是分别是V, W上的代数系统.若存在映射$\varphi: V \to W$，使得对任意$v^1, v^2 \in V$，满足$\varphi(v^1 \circ v^2) = \varphi(v^1) * \varphi(v^2)$，则称$\varphi$是$V$到$W$的同态，记为$End$；若$\varphi$还是一一映射，则称为同构，记为$Aut$.

定义 2.3 设G是 Lie 群，$\mathfrak{g}$是G的 Lie 代数. 对于任意$g \in G$，构造映射

$$Ad_g: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g};$$
$$X \mapsto Ad_g X = gXg^{-1}, \forall X \in \mathfrak{g},$$

则Ad_g可以诱导一个线性映射$Ad: G \to Aut(\mathfrak{g})$.我们指出，线性映射$Ad$是$G$到$Aut(\mathfrak{g})$的同构.

证明 我们先证$Ad_{gh} = Ad_g Ad_h$.

$$Ad_{gh}X = ghX(gh)^{-1} = g(hXh^{-1})g^{-1} = Ad_g Ad_h X,$$

于是就证明了$Ad_{gh} = Ad_g Ad_h$.而Ad显然是一一的，这就证明了Ad是G到$Aut(\mathfrak{g})$的同构.

■

我们称Ad是G的伴随表示.将Ad的微分记为ad，其定义如下.

定义 2.4 设G是 Lie 群，$\mathfrak{g}$是G的 Lie 代数.对于任意$X \in \mathfrak{g}$，构造映射

$$\begin{aligned} &ad_X: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}; \\ &Y \mapsto ad_X Y = [X, Y], \forall Y \in \mathfrak{g}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

则ad_X可以诱导一个线性映射$ad: \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})$.我们指出，线性映射$ad$是$\mathfrak{g}$到$End(\mathfrak{g})$的同态.

证明 要证ad给出了同态，即证$ad_{[X,Y]} = [ad_X, ad_Y]$.而根据 Lie 括号的 Jacobi 恒等式可得

$$\begin{aligned} ad_{[X,Y]}Z &= \big[[X,Y],Z\big] \\ &= -\big[[Y,Z],X\big] - \big[[Z,X],Y\big] \\ &= \big[X,[Y,Z]\big] - \big[Y,[X,Z]\big] \\ &= ad_X ad_Y Z - ad_Y ad_X Z \\ &= [ad_X, ad_Y]Z. \end{aligned}$$

这就证明了ad是$\mathfrak{g}$到$End(\mathfrak{g})$的同态.

■

我们称ad是$\mathfrak{g}$的伴随表示.

现在便可以定义$\mathfrak{g}$上的内积了[9].

定义 2.5 $\mathfrak{g}$上的内积$(\cdot,\cdot)$是一种伴随不变内积，对任意$X, Y, Z \in \mathfrak{g}$满足

$$([X, Y], Z) = (X, [Y, Z]). \tag{2.5}$$

定义 2.6 Cartan-Killing 型是一个双线性映射，对于任意$X, Y \in \mathfrak{g}$有

$$K: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to R;$$
$$(X,Y) \mapsto K(X,Y) = tr(ad_X ad_Y). \tag{2.6}$$

Lie 代数$\mathfrak{g}$的一组生成元$\{T_a\}$满足

$$[T_a, T_b] = f_{abc}T_c,$$

借助伴随表示可知$ad_{T_a}T_b = f_{abc}T_c$，这意味着ad_{T_a}在基底$\{T_a\}$下的矩阵完全由$(f_a)_{bc}$确定，其中b是行标号，c是列标号.再由(2.6)即可得到

$$K(T_a, T_b) = tr(f_{aij}f_{bjk}) = f_{aij}f_{bji}. \tag{2.7}$$

我们记$G_{ab} \equiv f_{aij}f_{bji}$，于是对于任意$X, Y \in \mathfrak{g}$都有

$$K(X,Y) = K(X^aT_a, Y^bT_b) = K(T_a, T_b)X^aY^b = G_{ab}X^aY^b.$$

有时我们也取 Lie 代数的表示空间为伴随表示，这样 Cartan-Killing 型就等价于矩阵的求迹运算.

命题 2.1(Cartan 判据) $det(G_{ab}) \leq 0$，当且仅当G是紧致半单 Lie 群.

我们指出，对于半单 Lie 代数$\mathfrak{g}$，负的 Cartan-Killing 型就是一种$\mathfrak{g}$上的伴随不变内积.

证明 对于任意$X, Y, Z \in \mathfrak{g}$，

$$-K([X,Y],Z) = -tr([ad_X, ad_Y]ad_Z) = -tr(ad_X[ad_Y, ad_Z]) = -K(X,[Y,Z]),$$

这完全满足(2.6)的要求，这就证明了负的 Cartan-Killing 型是$\mathfrak{g}$上的伴随不变内积.

■

伴随不变内积给出了 Lie 群的黎曼度量.考虑到相对论中的时空具有伪黎曼度量(pseudo-Riemannian metric)，于是我们放弃伴随不变内积的正定性条件，将任意 Lie 群的伴随不变内积都记为 Cartan-Killing 型.

将 Cartan-Killing 型的适用范围扩大到$\mathfrak{g}$值(p,q)型张量场，与 Riemann 流形上的度规结合就可以给出任意$\mathfrak{g}$值(p,q)型张量场的内积.

定义 2.8 对于任意$\mathfrak{g}$值(p,q)型张量场S, T，它们的内积可借助局部坐标系的分量表示为

$$(S,T) = G_{ab}g^{\nu_1\beta_1} \cdots g^{\nu_q\beta_q} g_{\mu_1\alpha_1} \cdots g_{\mu_1\alpha_p} (S^a)^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q} (T^b)^{\alpha_1\cdots\alpha_p}_{\beta_1\cdots\beta_q}. \tag{2.8}$$

后面主要使用的是$\mathfrak{g}$值微分形式场的内积，于是我们给出如下推论.

推论 对于任意$\mathfrak{g}$值q微分形式场ω, η，它们的内积借助局部坐标系的分量表示为

$$(\omega, \eta) = \frac{1}{q!} G_{ab} g^{\mu_1\cdots\mu_q} g^{\nu_1\cdots\nu_q} \omega^a_{\mu_1\cdots\mu_q} \eta^b_{\nu_1\cdots\nu_q}. \tag{2.9}$$

2.3 规范型

为了简化计算，我们时常对 Lie 群生成元做一个尺度变换，使得在新的基底下G_{ab}是单位矩阵δ_{ab}.这个过程实际上就是在将二次型化为规范型.我们举一个

$SU(2)$的例子.将$SU(2)$的元素U参数化为

$$U=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta^* & \alpha^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+bi & c+di\\ -c+di & a-bi\end{pmatrix},$$

其中$\alpha=a+bi,\beta=c+di\in\mathbb{C};a,b,c,d\in R$.由于特殊酉群的定义给出了一个约束条件$det(U)=a^2+b^2+c^2+d^2=1$，因此$SU(2)$只有三个独立参数，对应了三个生成元.我们设这三个独立参数是b,c,d，即令$a=\sqrt{1-b^2-c^2-d^2}$，容易算得这三个生成元分别是

$$T_1=\left.\frac{\partial U}{\partial d}\right|_{(b,c,d)=(0,0,0)}=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}=i\sigma_1;$$

$$T_2=\left.\frac{\partial U}{\partial c}\right|_{(b,c,d)=(0,0,0)}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=i\sigma_2;$$

$$T_3=\left.\frac{\partial U}{\partial b}\right|_{(b,c,d)=(0,0,0)}=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}=i\sigma_3,$$

其中$\sigma_i,i=1,2,3$是 Pauli 矩阵.而众所周知，Pauli 矩阵的对易关系为[17]

$$[\sigma_a,\sigma_b]=2i\varepsilon_{abc}\sigma_c,$$

所以

$$[T_a,T_b]=-2\varepsilon_{abc}T_c,$$

这表示$SU(2)$的 Lie 群结构常数$f_{abc}=-2\varepsilon_{abc}$，于是

$$(T_a,T_b)=tr\left(f_{aij}f_{bjk}\right)=4\varepsilon_{aij}\varepsilon_{bji}=-8\delta_{ab}.$$

因此

$$\left(\frac{T_a}{2\sqrt{2}i},\frac{T_b}{2\sqrt{2}i}\right)=tr\left(\frac{f_{aij}}{2\sqrt{2}i}\frac{f_{bjk}}{2\sqrt{2}i}\right)=\delta_{ab},$$

这就使 Cartan-Killing 型成为了规范型.

对于更高维数的 Lie 群，计算量会大大增加，但我们认为这样的基底总是存在的，在一般情况下并不追求其具体形式.有时也会引入 Casimir 不变量来描述生成元乘积的迹[1]，但我们更倾向使用上述“归一化”的 Lie 群度量.

以后，我们同时使用$(\cdot,\cdot)$与$tr(\,)$两种记号，它们都表示 Cartan-Killing 型，两种记号对应的 Lie 代数表示空间、表示基底读者应能自行分辨. 在不加声明的情况下，我们使用的基底都是指规范化的基底.

第三章 推广到 n 维的定域规范场论

本章我们论述了推广到n维的定域规范场论的基本原理。首先，我们给出了主纤维丛上联络算子的定义，再根据规范变换的性质推导得出了主纤维丛上的曲率二形式场；然后，我们利用 Hodge 对偶给出了（无源）规范理论的 Yang-Mills 作用量，并给出了 Yang-Mills 作用量一些性质；最后，我们给出了主丛曲率场满足的 Bianchi 恒等式，并利用最小作用量原理计算得出了 Yang-Mills 作用量满足的 Euler-Lagrange 方程。

本章内容主要参考了文献[3]，[8-10]，[12]，[14-16]。

3.1 主丛上的联络

设R^n是n维 Minkowski 时空，G是r维紧致半单 Lie 群，则$P = R^n \times G$称为R^n的平凡主丛，G称为P的结构 Lie 群. 我们记G的 Lie 代数为$\mathfrak{g}$.

定义 3.1 P上的联络算子为

$$D_A \overset{\text{def}}{=} d + A, \tag{3.1}$$

其中 d 是外微分算子； A是一个$\mathfrak{g}$值1微分形式场，称为与算子D_A对应的联络.在局部坐标系中$A \equiv qA_\mu dx^\mu$，$A_\mu \in \mathfrak{g}$，q是一个表征规范场耦合强度的参数. 注意到A是一个$\mathfrak{g}$值1微分形式场，这意味着A可用$\mathfrak{g}$的基本表示的一组基底$\{I_a\}$展开

$$A = qA_\mu dx^\mu = qA_\mu^a I_a dx^\mu,$$

其中A_μ^a是向量A_μ在基底$\{I_a\}$下的分量.

定义 3.2 G的规范群是指所有光滑映射$U: R^n \to G$的集合，记为$C^\infty(P)$.若将任意$U \in C^\infty(P)$看成一个作用在场$\phi(x^\mu)$上的线性算子，则称$U\phi$是对场ϕ的规范变换，记为：

$$\phi \to \phi' = U\phi. \tag{3.2}$$

借助指数映射，我们可将$C^\infty(P)$的元素记为$U = exp[I_a\theta^a(x)]$，其中$\theta^a(x)$是一个与时空坐标相关的参数.

在规范变换下，D_A作用到场ϕ的结果按照$D_{A'}\phi' = UD_A\phi$变换.而外微分算子具有唯一性，这意味着算子$D_{A'}$与D_A的差异完全体现在A上.将$D_{A'}\phi' = UD_A\phi$展开得$(d + A')(U\phi) = U(d + A)\phi$，进一步展开便得

$$dU + A'U = UA, \tag{3.3}$$

以U^{-1}右乘上式，移项即得

$$A' = UAU^{-1} - dUU^{-1}, \tag{3.4}$$

(3.4)即联络在规范变换下所满足的变换规律.

将$U = exp[I_a\theta^a(x)]$带入(3.4)，并将θ^a作为一个无穷小参数，则有

$$A'^a_\mu I_a = \left(A_\mu^a - f^{abc}A_\mu^b\theta^c + \frac{1}{q}\partial_\mu\theta^a\right)I_a + O(\theta^2).$$

当结构 Lie 群为$U(1)$时，取$I = i$，且结构常数$f^{abc} \equiv 0$，于是

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{q}\partial_\mu\theta,$$

这正是电磁势的变换规则；当结构 Lie 群为$SU(2)$时，取$I_a = \sigma_a/2i$，此时结构常数 $f^{abc} = \varepsilon^{abc}$，于是

$$\boldsymbol{A}'_\mu = \boldsymbol{A}_\mu - \boldsymbol{A}_\mu \times \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{q}\partial_\mu\boldsymbol{\theta},$$

这正是$SU(2)$规范势的变换规则.

通常联络的选择并不唯一，为了论述这一性质，我们给出下述命题.

命题 3.1 若$\mathfrak{g}$值1微分形式场B在规范变换下满足

$$B' = UBU^{-1}, \tag{3.5}$$

则$C = A + B$也是一个联络.

证明 由(3.4)即得

$$A' + B' = U(A+B)U^{-1} - dUU^{-1} = C'.$$

■

由此可见，联络的选择有相当大的任意性.在物理中也确实是这样，我们通常会附加 Lorenz 规范、Coulomb 规范等条件，对联络的选择加以限制.

记$D_A\phi = d\phi + A\phi = D_\mu\phi dx^\mu$，其中$D_\mu = \partial_\mu + qA_\mu$，称为与联络$A$对应的协变导数算子.许多教材使用协变导数来定义联络，可见这是一种分量表述方法.

3.2 主丛上的曲率

对(3.3)求外微分得

$$dA'U - A' \wedge dU = dU \wedge A + UdA, \tag{3.6}$$

将(3.3)带入(3.6)消去dU得到

$$(dA' + A' \wedge A')U = U(dA + A \wedge A). \tag{3.7}$$

定义 3.3 将$dA + A \wedge A$记为记为F_A，称为联络A在局部的曲率.

于是(3.7)可以改写为

$$F_{A'} = UF_AU^{-1}, \tag{3.8}$$

这就是主丛P的曲率在规范变换下满足的变换公式. 值得注意的是，曲率F_A的变换公式(3.8)是齐次的，而联络A的变换公式(3.4)不是齐次的.

局部坐标系下的曲率是一个2微分形式场

$$\begin{aligned}
F_A &= dA + A \wedge A \\
&= q\big(\partial_\mu A_\nu + qA_\mu A_\nu\big)dx^\mu \wedge dx^\nu \\
&= q\big(\partial_\mu A^a_\nu I_a + qA^a_\mu A^b_\nu I_a I_b\big)dx^\mu \wedge dx^\nu \\
&= \frac{q}{2}\big(2\partial_{[\mu}A^a_{\nu]} + qf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu\big)I_a dx^\mu \wedge dx^\nu \\
&= \frac{q}{2}F^a_{\mu\nu}I_a dx^\mu \wedge dx^\nu,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

其中$F^a_{\mu\nu}I_a = \left(2\partial_{[\mu}A^a_{\nu]} + qf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu\right)I_a$.我们指出，主丛的曲率对应了规范场强.例如，当结构 Lie 群为$U(1)$时，$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$，这正是电磁场的场强张量；当结构 Lie 群为$SU(2)$时有$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \boldsymbol{A}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{A}_\mu + q\boldsymbol{A}_\mu \times \boldsymbol{A}_\nu$，这对应了旋量理论的场强张量.

3.3 Yang-Mills 作用量

Yang-Mills 作用量是规范理论的核心，它具有自然的内积结构，由 Hodge 对偶给出.

定义 3.4 记$\Lambda^q(P)$为R^n局部上所有$\mathfrak{g}$值q微分形式场构成的矢量空间.定义 Hodge Star 算子：

$$\begin{gathered} *: \Lambda^q(P) \to \Lambda^{n-q}(P); \\ dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_q} \mapsto \frac{1}{(n-q)!}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_q\mu_{q+1}\cdots\mu_n} dx_{\mu_{q+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{\mu_n}, \end{gathered} \tag{3.10}$$

它有如下性质：

1） ${}^*1 = \epsilon$;

2） $**: \Lambda^q(P) \to \Lambda^q(P); \omega \mapsto (-1)^{s+q(n-q)}\omega, \forall \omega \in \Lambda^q(P)$,

其中s是R^n度规特征值中负号的个数，也即度规矩阵的负惯性指数.

通过 Hodge Star 算子可以求得F_A的对偶微分形式${}^*F_A$：

$$\begin{aligned} {}^*F_A &= \frac{q}{2}F^a_{\mu\nu}I_a{}^*(dx^\mu \wedge dx^\nu) \\ &= \frac{q}{2(n-2)!}F^a_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\mu_1\cdots\mu_{n-2}}I_a dx_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx_{\mu_{n-2}} \\ &= \frac{q}{(n-2)!}{}^*F^a_{\mu_1\cdots\mu_{n-2}}I_a dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_{n-2}}, \end{aligned}$$

其中

$${}^*F^a_{\mu_1\cdots\mu_{n-2}} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}{}_{\mu_1\cdots\mu_{n-2}}F^a_{\mu\nu}.$$

定义 3.5 对于任意$\mathfrak{g}$值q微分形式场ω, η，若定义双线性映射$\langle\cdot,\cdot\rangle$使得

$$\langle\omega, \eta\rangle = \int_{R^n} tr(\omega \wedge {}^*\eta),$$

则$\langle\cdot,\cdot\rangle$满足内积的定义，我们称$\langle\cdot,\cdot\rangle$是主丛$P$上的整体内积.

证明 在局部坐标系下有

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{q!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_q}dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_q}; \\ \eta &= \frac{1}{q!}\eta_{\nu_1\cdots\nu_q}dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_q}, \end{aligned}$$

对η取 Hodge 对偶得到

$${}^*\eta = \frac{1}{q!\,(n-q)!}\eta^{\nu_1\cdots\nu_q}\epsilon_{\nu_1\cdots\nu_q\nu_{q+1}\cdots\nu_n}dx^{\nu_{q+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_n},$$

所以

$$\omega \wedge {}^*\eta = \frac{1}{q!\,q!\,(n-q)!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_q}\eta^{\nu_1\cdots\nu_q}\epsilon_{\nu_1\cdots\nu_q\nu_{q+1}\cdots\nu_n}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_q}\wedge dx^{\nu_{q+1}}\wedge\cdots\wedge dx^{\nu_n}$$

$$= \frac{1}{q!\,q!\,(n-q)!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_q}\eta^{\nu_1\cdots\nu_q}\epsilon_{\nu_1\cdots\nu_q\nu_{q+1}\cdots\nu_n}\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_q\nu_{q+1}\cdots\nu_n}dx^0\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_{n-1}}$$

$$= -\frac{1}{q!\,q!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_q}\eta^{\nu_1\cdots\nu_q}\delta^{\mu_1\cdots\mu_q}_{\nu_1\cdots\nu_q}\sqrt{-g}dx^0\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_{n-1}}$$

$$= -\frac{1}{q!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_q}\eta^{\nu_1\cdots\nu_q}\delta^{\mu_1}_{[\nu_1}\cdots\delta^{\mu_q}_{\nu_q]}\sqrt{-g}dx^0\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_{n-1}}$$

$$= -\frac{1}{q!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_q}\eta^{\mu_1\cdots\mu_q}\sqrt{-g}dx^0\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_{n-1}},$$

同理可以得到$\omega\wedge{}^*\eta = \eta\wedge{}^*\omega$.于是

$$tr(\omega\wedge{}^*\eta) = -\frac{1}{q!}tr\left(\omega_{\mu_1\cdots\mu_q}\eta^{\mu_1\cdots\mu_q}\right)\sqrt{-g}dx^0\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_{n-1}}$$

$$= -\frac{1}{q!}\omega^a_{\mu_1\cdots\mu_q}(\eta^b)^{\mu_1\cdots\mu_q}tr(f_af_b)\sqrt{-g}dx^0\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_{n-1}}$$

$$= -(\omega,\eta)\epsilon,$$

其中f_a是伴随表示基底，积分上式得到

$$\langle\omega,\eta\rangle = \int_{R^n} tr(\omega\wedge{}^*\eta) = -\int_{R^n}(\omega,\eta)\epsilon.$$

显然映射$\langle\cdot,\cdot\rangle$的性质完全由$(\cdot,\cdot)$决定，因此$\langle\cdot,\cdot\rangle$也是内积.

■

整体内积结构的一个重要结论即 Yang-Mills 作用量，定义如下.

定义 3.6 Yang-Mills 作用量为

$$S_A = \frac{1}{2}\langle F_A, F_A\rangle. \tag{3.11}$$

根据整体内积的定义可以立即得到

$$S_A = \frac{1}{2}\int_{R^n} tr(F_A\wedge{}^*F_A) = -\frac{1}{2}\int_{R^n}(F_A,F_A)\epsilon = \int_{R^n}\mathcal{L}_A\epsilon,$$

其中

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{2}(F_A,F_A), \tag{3.12}$$

称为 Yang-Mills 拉式量.容易得到局部坐标系下的 Yang-Mills 拉式量为

$$\mathcal{L}_A = -\frac{q^2}{4}G_{ab}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F^a_{\mu\nu}F^b_{\alpha\beta} = -\frac{q^2}{4}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F^a_{\mu\nu}F^a_{\alpha\beta},$$

其中G_{ab}是正交归一化的 Cartan-Killing 型.下面我们给出一些关于 Yang-Mills 作用量的性质.

命题 3.2 Yang-Mills 作用量是规范不变的.

证明 由(3.8)(3.11)即得

$$S_{A'} = \frac{1}{2}\int_{R^n} tr\left(F^a_AUf_aU^{-1}\wedge{}^*F^b_AUf_bU^{-1}\right) = \frac{1}{2}\int_{R^n}tr\left(F^a_Af_a\wedge{}^*F^b_Af_b\right) = S_A,$$

其中f_a是伴随表示基底.

■

命题 3.3 R^4的 Yang-Mills 作用量是共形不变的.

证明 在R^4共形变换的作用下，度规矩阵按下面这样变换

$$g_{\mu\nu} \to \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu};$$
$$g^{\mu\nu} \to \tilde{g}^{\mu\nu} = \Omega^{-2} g^{\mu\nu},$$

所以 Yang-Mills 拉式量与 Levi-Civita 张量按下面这样变换

$$\mathcal{L}_A \to \tilde{\mathcal{L}}_A = -\frac{q^2}{4}\tilde{g}^{\mu\alpha}\tilde{g}^{\nu\beta}F^a_{\mu\nu}F^a_{\alpha\beta} = -\frac{q^2}{4}\Omega^{-4}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F^a_{\mu\nu}F^a_{\alpha\beta} = \Omega^{-4}\mathcal{L}_A;$$

$$\epsilon \to \tilde{\epsilon} = \sqrt{-g}\varepsilon = \left(-\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{g}_{\mu1}\tilde{g}_{\nu2}\tilde{g}_{\rho3}\tilde{g}_{\sigma4}\right)^{\frac{1}{2}}\varepsilon = \Omega^4\left(-\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}g_{\mu1}g_{\nu2}g_{\rho3}g_{\sigma4}\right)^{\frac{1}{2}}\varepsilon = \Omega^4\epsilon,$$

于是

$$\tilde{S}_A = \int_{R^4}\tilde{\mathcal{L}}_A\tilde{\epsilon} = \int_{R^4}\mathcal{L}_A\epsilon = S_A.$$

■

3.4 Yang-Mills 方程

若$\mathfrak{g}$值q微分形式场S在规范变换下满足

$$S' = USU^{-1}, \tag{3.13}$$

则对(3.13)外微分得到

$$dS' = dU \wedge SU^{-1} + UdSU^{-1} + (-1)^q US \wedge dU^{-1},$$

考虑到(3.3)以及$0 = d(UU^{-1}) = dUU^{-1} + UdU^{-1}$，带入上式消去$dU$以及$dU^{-1}$，整理得到

$$dS' + A' \wedge S' - (-1)^q S' \wedge A' = U[dS + A \wedge S - (-1)^q S \wedge A]U^{-1}.$$

定义 3.7 定义

$$D_A S = dS + A \wedge S - (-1)^q S \wedge A, \tag{3.14}$$

则有$D_{A'}S' = UD_A SU^{-1}$.

注意到(3.5)与(3.8)均满足(3.14)，于是立即得到

$$D_A B = dB + A \wedge B + B \wedge A;$$
$$D_A F_A = dF_A + A \wedge F_A - F_A \wedge A,$$

这两个等式在后续推导中十分重要.

命题 3.4(Bianchi 恒等式)

$$D_A F_A = 0. \tag{3.15}$$

证明 对$F_A = dA + A \wedge A$两侧取外微分得到

$$\begin{aligned} dF_A &= dA \wedge A - A \wedge dA \\ &= (F_A - A \wedge A) \wedge A - A \wedge (F_A - A \wedge A) \\ &= F_A \wedge A - A \wedge F_A, \end{aligned}$$

于是$D_A F_A = dF_A + A \wedge F_A - F_A \wedge A = 0$.

■

设τ是一个实参数，B是满足(3.5)的$\mathfrak{g}$值1微分形式场，则 Yang-Mills 作用量的变分为

$$\delta S_A = \lim_{t \to 0} \frac{S_{A+tB} - S_A}{t}.$$

由此我们可推出 Yang-Mills 作用量满足的 Euler-Lagrange 方程，称为 Yang-Mills 方程.

命题 3.5 (Yang-Mills 方程) Yang-Mills 作用量满足的 Euler-Lagrange 方程为

$$D_A {}^* F_A = 0. \tag{3.16}$$

证明 我们先计算F_{A+tB}，

$$\begin{aligned} F_{A+tB} &= d(A+tB) + (A+tB) \wedge (A+tB) \\ &= (dA + A \wedge A) + t(dB + A \wedge B + B \wedge A) + t^2 B \wedge B \\ &= F_A + tD_A B + t^2 B \wedge B. \end{aligned}$$

由整体内积的线性性、对称性可得

$$\begin{aligned} S_{A+tB} &= \frac{1}{2} \langle F_{A+tB}, F_{A+tB} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle F_A + tD_A B + t^2 B \wedge B, F_A + tD_A B + t^2 B \wedge B \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle F_A, F_A \rangle + t \langle D_A B, F_A \rangle + O(t^2) \\ &= S_A + t \langle D_A B, F_A \rangle + O(t^2), \end{aligned}$$

于是

$$\delta S_A = \lim_{t \to 0} \frac{S_{A+tB} - S_A}{t} = \langle D_A B, F_A \rangle.$$

下面我们来证明$\delta S_A = \langle D_A B, F_A \rangle = 0$能导出$D_A {}^* F_A = 0$.

因为

$$\begin{aligned} & D_A B \wedge {}^* F_A - B \wedge D_A {}^* F_A \\ &= (dB + A \wedge B + B \wedge A) \wedge {}^* F_A - B \wedge [d {}^* F_A + A \wedge {}^* F_A - (-1)^{n-2} {}^* F_A \wedge A] \\ &= d(B \wedge {}^* F_A) + A \wedge B \wedge {}^* F_A - (-1)^{n-1} B \wedge {}^* F_A \wedge A \\ &= D_A (B \wedge {}^* F_A), \end{aligned}$$

所以

$$\int_{R^n} tr(B \wedge D_A {}^* F_A) = \int_{R^n} tr(D_A B \wedge {}^* F_A) - \int_{R^n} tr[D_A (B \wedge {}^* F_A)].$$

我们总可以在R^n的边界上选择联络使得$D_A(B \wedge {}^* F_A) = d(B \wedge {}^* F_A)$，于是根据 Stokes 定理立即得到

$$\int_{R^n} tr[D_A(B\wedge {}^*F_A)] = \int_{\partial R^n} tr(B\wedge {}^*F_A) = 0.$$

又因为

$$\delta S_A = \langle D_A B, F_A\rangle = \int tr(D_A B\wedge {}^*F_A) = 0,$$

所以

$$\int_{R^n} tr(B\wedge D_A{}^*F_A) = 0.$$

上式对于任意满足(3.5)的B均成立，则$D_A{}^*F_A \equiv 0$.

■

设守恒流J是满足 Noether 定理的$\mathfrak{g}$值1微分形式场，则下式称为含源的 Yang-Mills 作用量

$$S_A = \frac{1}{2}\langle F_A, F_A\rangle - \langle A, J\rangle. \tag{3.17}$$

容易得到(3.17)的最小作用量为

$$\begin{aligned}0 = \delta S_A &= \lim_{t\to 0}\frac{S_{A+tB} - S_A}{t}\\ &= \langle D_A B, F_A\rangle - \langle B, J\rangle\\ &= \int_{R^n} tr[B\wedge (D_A{}^*F_A - {}^*J)],\end{aligned}$$

上式对于任意满足(3.5)的B均成立，于是得到(3.17)满足的 Euler-Lagrange 方程为

$$D_A{}^*F_A = {}^*J, \tag{3.18}$$

(3.18)称为含源的 Yang-Mills 方程.

我们能在局部坐标系中讨论 Bianchi 恒等式与含源的 Yang-Mills 方程.局部坐标系下，(3.15)可以写成

$$\begin{aligned}0 &= \frac{q}{2}D_\rho F_{\mu\nu}dx^\rho\wedge dx^\mu\wedge dx^\nu\\ &= \frac{q}{2}D_\rho F_{\mu\nu}\frac{(-1)^{s+3(n-3)}}{(n-3)!}\epsilon^{\rho\mu\nu\mu_1\cdots\mu_{n-3}}{}^*\left(dx_{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\mu_{n-3}}\right)\\ &= (-1)^{s+3(n-3)}\frac{q}{(n-3)!}D_\rho\left(\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\mu_1\cdots\mu_{n-3}}F_{\mu\nu}\right)^*\left(dx_{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\mu_{n-3}}\right)\\ &= (-1)^{s+3(n-3)}\frac{q}{(n-3)!}D_\rho{}^*F^{\rho\mu_1\cdots\mu_{n-3}}{}^*\left(dx_{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\mu_{n-3}}\right),\end{aligned}$$

上式为零的充要条件即

$$D_\rho{}^*F^{\rho\mu_1\cdots\mu_{n-3}} = 0; \tag{3.19}$$

(3.18)可以写成

$$\begin{aligned}0 &= D_A{}^*F_A - {}^*J\\ &= \left(\frac{q}{2(n-2)!}D_\rho F^{\mu\nu}\epsilon_{\mu\nu\mu_1\cdots\mu_{n-2}} - \frac{1}{(n-1)!}J^\alpha\epsilon_{\alpha\rho\mu_1\cdots\mu_{n-2}}\right)dx^\rho\wedge dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_{n-2}}\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{q}{2(n-2)!} D_\rho F^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\mu_1\cdots\mu_{n-2}} - \frac{1}{(n-1)!} J^\alpha \epsilon_{\alpha\rho\mu_1\cdots\mu_{n-2}}\right) (-1)^{s+n-1} \epsilon^{\rho\mu_1\cdots\mu_{n-2}\sigma} {}^*(dx_\sigma)$$
$$= (-1)^{s+2n-3} \left(-\frac{q}{2} D_\rho F^{\mu\nu} \delta^{\rho\sigma}_{\mu\nu} + J^\alpha \delta^\sigma_\alpha\right) {}^*(dx_\sigma)$$
$$= (-1)^{s+2n-3} \left(-q D_\rho F^{\rho\sigma} + J^\sigma\right)^*(dx_\sigma),$$

上式为零的充要条件即

$$D_\rho F^{\sigma\rho} = -\frac{1}{q} J^\sigma. \tag{3.20}$$

容易发现$n = 4$且结构 Lie 群为$U(1)$时，通过适当调整系数，(3.19)(3.20)就对应了 Maxwell 方程组的协变形式（见附录 B）.

第四章 总结与展望

通过以上的计算，我们从一些很基本的结构一步步的推导得出了 Yang-Mills 方程等结构，这些结构是物理工作者乃至数学工作者们认知世界、改造世界的有力武器。一方面，规范场论是实实在在的、反映微观世界本质属性的第一性原理；另一方面，规范场的结构也暗示着自然界和谐、统一的巨大潜力。

虽然本文论述的只是平直时空的定域规范理论，但大部分内容均可直接挪到弯曲时空上去，这得益于本文的严谨表述。推广到弯曲时空的困境在于联络的定义上，这里可以进一步研究。

我们可以在(3.11)(3.17)的基础上再加入一些与几何性质（度规）无关的项，称为拓扑项。最著名的拓扑项即 Chern-Simons 项，3 维流形M上的 Chern-Simons 作用量为

$$S_{CS}=\int_M tr\left(dA\wedge A+\frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\right). \tag{4.1}$$

Chern-Simons 项只存在于奇数维时空中，其性质完全由流形M的拓扑属性决定，在近些年受到广泛关注[2][6]。

另外，虽然本文谈及了大部分的细节，但仍然存在一些未能解决的问题。例如，文章并没有谈及主丛的伴随丛，这导致许多地方的表述含混不清：(3.2)缺少了对物质场ϕ的表述，实际上它是伴随丛的截面[15]；(3.5) (3.8)(3.13)(3.14)论述的是伴随丛上的张量场的变换性质[8][15]；(3.18)关于守恒流J的表述也不够充分。这些地方仍需进一步的补充说明。

参考文献

[1]Michael. Peskin, Daniel. Schroeder. An Introduction to Quantum Field Theory[M]. New York: Westview Press, 1995, 497-502

[2]A.Zee. Einstein Gravity In a Nutshell[M]. Oxfordshire: Princeton University Press, 2013, 671-695,719-722

[3]Sean Carroll. Spacetime and Geometry An Introduction to General Relativity[M]. San Francisco: Addison Wesley, 2004, 82-90

[4]H.Weyl. Gravitation and electricity[J]. Sitzungsbe Preuss Akad Wiss Berlin, 1918: 465-480

[5]Steven Weinberg. The Making of the Standard Model[DB/OL]. arXiv:hep-ph/0401010, 2004/2020

[6] Edward Witten. Quantum Field Theory and the Jones Polynomial[J] Commun Math Phys, 1989,121:351-399

[7]杨振宁.麦克斯韦方程和规范理论的观念起源[J].物理,2014,43(12):780-786

[8]陈省身,陈维桓.微分几何讲义[M].第二版.北京:北京大学出版社,2001:65-114,235-237

[9]姚纯青.规范固定Yang-Mills热流[D].上海:华东师范大学,2006

[10]王正行.简明量子场论[M].北京:北京大学出版社,2008:13-27,199-206

[11]施郁.规范理论一百年：N个诺奖得主的世纪缠绵[DB/OL].Link,2019/2020

[12]丁青.Yang-Mills理论的几何及其应用[R].上海:复旦大学数学学院,2014

[13]F.W.瓦内尔.微分流形与李群基础[M].北京：科学出版社, 2008: 110-113

[14]白正国,沈一兵,水乃翔,郭孝英.黎曼几何初步[M].修订版.北京:高等教育出版社,2004:149-164

[15]侯伯元,侯伯宇．物理学家用微分几何[M].北京：科学出版社,2004:408-418

[16]张宏浩. Maxwell 方程的张量与外微分形式[DB/OL].Link,2018/2020

[17]喀兴林．高等量子力学[M].第二版.北京：高等教育出版社,2001:144-147

附录 A

本附录阐述了本文所使用的符号约定。下面讨论的对象都是n维平直时空R^n与r维半单 Lie 群G上的结构。

A.1 指标

对于时空流形，我们使用 Dirac 的指标记号，形如$(x^\mu)=(x^0,\cdots,x^{n-1})$；用$R^n$的度规升降指标，形如$g_{\mu\nu}S^\mu\equiv S_\nu$，$g^{\mu\nu}T_\mu\equiv T^\nu$.

我们不区分 Lie 代数表示空间的上下指标.

A.2 Levi-Civita 符号

Levi-Civita 符号ε是一个权为1的$(0,n)$型张量密度（场），在局部坐标系下表示成

$$\varepsilon=\frac{1}{n!}\varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_n}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_n}=dx^0\wedge\cdots\wedge dx^{n-1},$$

其中分量$\varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_n}$在所有局部坐标下均满足如下定义

$$\varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_n}=\begin{cases}+1,\mu_1\cdots\mu_n\text{是偶置换;}\\ \ \ 0,\mu_1\cdots\mu_n\text{不是置换;}\\ -1,\mu_1\cdots\mu_n\text{是奇置换.}\end{cases}$$

A.3 体元

体元是一个n微分形式场，称为 Levi-Civita 张量场，在局部坐标系下表示成

$$\epsilon=\sqrt{-g}\varepsilon=\frac{1}{n!}\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_n}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_n}=\sqrt{-g}dx^0\wedge\cdots\wedge dx^{n-1},$$

其中分量$\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_n}=\sqrt{-g}\varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_n}$，$g$是局部坐标系度规张量的行列式.易证逆变形式的 Levi-Civita 张量场分量为

$$\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_n}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_n}.$$

A.4 广义 Kronecker 符号

我们记

$$\delta^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\nu_1\cdots\nu_n}=det\begin{pmatrix}\delta^{\mu_1}_{\nu_1} & \cdots & \delta^{\mu_1}_{\nu_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \delta^{\mu_n}_{\nu_1} & \cdots & \delta^{\mu_n}_{\nu_n}\end{pmatrix},$$

易证如下关系

1)

$$\delta^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\nu_1\cdots\nu_n}=n!\,\delta^{\mu_1}_{[\nu_1}\cdots\delta^{\mu_n}_{\nu_n]};$$

2)

$$\epsilon_{\nu_1\cdots\nu_n}\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_n}=\varepsilon_{\nu_1\cdots\nu_n}\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_n}=-\delta^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\nu_1\cdots\nu_n};$$

3)

$$
\begin{aligned}
\delta^{\mu_1\cdots\mu_{n-1}\alpha_1}_{\nu_1\cdots\nu_{n-1}\alpha_1} &= \delta^{\mu_1\cdots\mu_{n-1}}_{\nu_1\cdots\nu_{n-1}};\\
\delta^{\mu_1\cdots\mu_{n-2}\alpha_1\alpha_2}_{\nu_1\cdots\nu_{n-2}\alpha_1\alpha_2} &= 2!\,\delta^{\mu_1\cdots\mu_{n-2}}_{\nu_1\cdots\nu_{n-2}};\\
&\cdots\\
\delta^{\mu_1\cdots\mu_{n-q}\alpha_1\cdots\alpha_q}_{\nu_1\cdots\nu_{n-q}\alpha_1\cdots\alpha_q} &= q!\,\delta^{\mu_1\cdots\mu_{n-q}}_{\nu_1\cdots\nu_{n-q}};\\
&\cdots\\
\delta^{\mu_1\mu_2\alpha_1\cdots\alpha_{n-2}}_{\nu_1\nu_2\alpha_1\cdots\alpha_{n-2}} &= (n-2)!\,\delta^{\mu_1\mu_2}_{\nu_1\nu_2};\\
\delta^{\mu_1\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}}_{\nu_1\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}} &= (n-1)!\,\delta^{\mu_1}_{\nu_1};\\
\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_n}_{\alpha_1\cdots\alpha_n} &= n!.
\end{aligned}
$$

A.5 全反对称

我们将指标的全反对称操作写作如下形式

$$T_{[\mu_1\cdots\mu_n]} := \frac{1}{n!}\sum_{\sigma(\mu_1\cdots\mu_n)} \varepsilon_{\sigma(\mu_1\cdots\mu_n)} T_{\sigma(\mu_1\cdots\mu_n)},$$

其中$\sigma(\mu_1\cdots\mu_n)$是$\mu_1\cdots\mu_n$的一个置换.

A.6 Lie 群结构常数

Lie 代数的一组生成元$\{I_a\}$满足

$$[I_a, I_b] = f_{abc} I_c,$$

其中f_{abc}称为 Lie 群结构常数. 由于我们不区分 Lie 代数的上下指标，有时也将f_{abc}记为$f^{abc}, f^a{}_{bc}$等形式.

附录 B

本附录由 Maxwell 方程组推导得出了电磁场所满足的规范场方程。

B.1 符号约定

1)时空坐标

$$x^\mu = \left(x^0, x^i\right), x^0 = ct;$$

2)度规

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = diag(-1,1,1,1);$$

3)规范场

$$A^\mu = \left(A^0, A^i\right), A^0 = \frac{1}{c}\varphi;$$

4)守恒流

$$J^\mu = \left(J^0, J^i\right), J^0 = c\rho;$$

5)Maxwell 方程组

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}; \tag{B.1}$$

$$\nabla \cdot B = 0; \tag{B.2}$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}; \tag{B.3}$$

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{B.4}$$

B.2 电磁场张量

在我们引入标量势与矢量势后，磁感应强度B与电场强度E可以构造出电磁场张量$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

$$B = \nabla \times A$$

$$\Rightarrow B^i = \epsilon^{ijk}\partial_j A_k = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\left(\partial_j A_k - \partial_k A_j\right) = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk};$$

$$E = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\Rightarrow E_i = -\partial_i(-cA_0) - c\partial_0 A_i = c(\partial_i A_0 - \partial_0 A_i) = cF_{i0}.$$

于是得到

$$F_{i0} = -F_{0i} = -F^{i0} = F^{0i} = \frac{1}{c}E_i;$$

$$F_{jk} = F^{jk} = \epsilon^{ijk}B_i.$$

$F_{\mu\nu}$的显式矩阵为

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_1 & -\frac{1}{c}E_2 & -\frac{1}{c}E_3 \\ \frac{1}{c}E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ \frac{1}{c}E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ \frac{1}{c}E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix};\ F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_1 & \frac{1}{c}E_2 & \frac{1}{c}E_3 \\ -\frac{1}{c}E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -\frac{1}{c}E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -\frac{1}{c}E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

B.3 Bianchi 恒等式

由(B.1)得到

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla\times E+\frac{\partial B}{\partial t} \\ &= \epsilon^{ijk}\partial_j(cF_{k0})+c\partial_0\left(\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk}\right) \\ &= \epsilon^{ijk}\partial_jF_{k0}+\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\partial_0F_{jk} \\ &= \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\partial_jF_{k0}+\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\partial_jF_{k0}+\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\partial_0F_{jk} \\ &= \frac{1}{2}\epsilon^{ijk0}\partial_jF_{k0}+\frac{1}{2}\epsilon^{ij0k}\partial_jF_{0k}+\frac{1}{2}\epsilon^{i0jk}\partial_0F_{jk} \\ &= \frac{1}{2}\epsilon^{i\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma}. \end{aligned}$$

由(B.2)得到

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla\cdot B \\ &= \partial_i\left(\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk}\right) \\ &= \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\partial_iF_{jk} \\ &= \frac{1}{2}\epsilon^{0ijk}\partial_iF_{jk}. \end{aligned}$$

联立即得 Bianchi 恒等式

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\epsilon^{i\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma}+\frac{1}{2}\epsilon^{0ijk}\partial_iF_{jk}=0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma}=0. \end{aligned}$$

若令对偶场

$$^*F^{\mu\nu}=\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma},$$

可得对偶场的矩阵显式为

$$
{}^*F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & -\frac{1}{c}E_3 & \frac{1}{c}E_2 \\ B_2 & \frac{1}{c}E_3 & 0 & -\frac{1}{c}E_1 \\ B_3 & -\frac{1}{c}E_2 & \frac{1}{c}E_1 & 0 \end{pmatrix};\ {}^*F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & -\frac{1}{c}E_3 & \frac{1}{c}E_2 \\ -B_2 & \frac{1}{c}E_3 & 0 & -\frac{1}{c}E_1 \\ -B_3 & -\frac{1}{c}E_2 & \frac{1}{c}E_1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

B.4 含源的 Yang-Mills 方程

由(B.3)得到

$$
\begin{aligned}
\mu_0 J &= \nabla \times B - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} \\
\Rightarrow \mu_0 J^i &= \epsilon^{ijk}\partial_j\left(\frac{1}{2}\epsilon_{kmn}F^{mn}\right) - \frac{1}{c^2}c\partial_0\left(-cF^{i0}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\delta^i_m\delta^j_n - \delta^i_n\delta^j_m\right)\partial_j F^{mn} + \partial_0 F^{i0} \\
&= \partial_j F^{ij} + \partial_0 F^{i0} \\
&= \partial_\nu F^{i\nu}.
\end{aligned}
$$

由(B.4)得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\rho}{\varepsilon_0} &= \nabla \cdot E \\
\Rightarrow \frac{J^0}{c\varepsilon_0} &= -c\partial_i F^{i0} \\
\Rightarrow \frac{J^0}{\varepsilon_0 c^2} &= \partial_i F^{0i} \\
\Rightarrow \mu_0 J^0 &= \partial_i F^{0i} + \partial_0 F^{00} = \partial_\nu F^{0\nu}.
\end{aligned}
$$

联立即得含源的 Yang-Mills 方程

$$
\begin{aligned}
\partial_\nu F^{i\nu} + \partial_i F^{0i} &= \mu_0 J^i + \mu_0 J^0 \\
\Rightarrow \partial_\nu F^{\mu\nu} &= \mu_0 J^\mu.
\end{aligned}
$$

于是，我们就证明了 Maxwell 方程组前两个方程(B.1)(B.2)与 Bianchi 恒等式等价；后两个方程(B.3)(B.4)在与含源的 Yang-Mills 方程等价.

致谢

在接受公立教育的这 16 年里，似乎我所做的一切都不会得到大家的认可。小学时代，数学老师曾形容我“行为怪异”，同学在闲聊中谈及我会说“他脑子跟别人不一样”；中学时代，我一度认为凭借那糟糕的成绩只能就读于一所专科学校。那时我常想象着去一个铁路职业技术学校，最终当一名地铁司机。然而我是幸运的，高考时我得到了一个从未有过的成绩，我终于有书读了。而大学时代，我的成绩仍是这样的糟糕，我的工作仍是这样的不被理解，以至于在 2018 年上半年我彻底崩溃了。所幸在老师、家人以及朋友的帮助下，我终于走出了阴霾。

首先，我要感谢感谢王旭东老师。2017 年底，王旭东老师面向本科生开设了量子场论与广义相对论的课程。还记得最开始的时候，我不能理解度规升降指标的规则，对那些无穷无尽的抽象指标记号充满恐惧。改观是在学习协变导数时，定义一种作用在度规上等于零的协变导数，然后计算这种协变导数对应的联络，再计算测地线方程、黎曼曲率张量，最终就能计算真空引力场方程了。在最糟糕的那段时间里，我怀着沉重的负罪感学习着这一切，而这些知识在最大程度上给予了我一丝慰藉。我忘不了 2018 年 9 月第一次求解 Schwarzschild 解的情景，也忘不了 2019 年 7 月第一次参加全国性学术会议的情景。我的这些工作离不开王旭东老师的帮助。

感谢日本东北大学的李滔瀚博士。从 2017 年到现在，我已与李博士结识三年了。李博士为我树立了学术研究的榜样，他让我如此近距离的接触到原本只能在书本中看到的科研机构。感谢李博士对我工作的认可。

感谢辅导员王茂州老师。在我极其艰难的本科生涯里，王茂州老师给予了我非常多的帮助，他让我晓得了生命的价值与意义，让我晓得了除了学术以外，生活还有无限的可能性。

感谢我的室友梁天、刘涛、王田宇、张冠雄、周宸。在本科最初的那两年里，我过于任性，给室友造成了一些麻烦。感谢他们对我的宽容与照顾，也感谢他们在学习、生活中对我的帮助。

感谢我的父母。他们在物质上对我的支持使我在这四年里能够安心学业。

在写完这篇文章时，我仍有两门课程没有通过，我甚至不知道自己能否能够顺利毕业。但不管将来的结局如何，我都可以自豪的告诉别人，我曾经是个理想主义者。

代顺治
二零二零年四月八日